もやもの数学「１日１題」

$\boxed{4}$ 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
ただし，$a_n>0$ であることは証明なしで用いてよい。

$$a_1=\frac{1}{2}\ ,\quad a_{n+1}=a_n-3a_{n+1}a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【数学B「数列」難易度 ★★☆☆☆（入試基礎レベル）】

解説

$(3a_n+1)a_{n+1}=a_n$

$3a_n+1\fallingdotseq 0$ より

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$$

（２項間)漸化式は
$a_{n+1}=(a_n$の式)
として，パターンを見抜くのが基本方針

$a_n\fallingdotseq 0$ より，逆数とって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}$$

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型は
逆数とって，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおく
（パターン暗記必須）

よって，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+3$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，

$b_{n+1}=b_n+3$

$a_{n+1}=a_n+d$
→公差 d の等差数列

$b_1=\dfrac{1}{a_1}=2$ より，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$

$\{b_n\}$ は初項２，公差３の等差数列

よって，$b_n=2+(n-1)\cdot 3$

したがって，$b_n=3n-1$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ より　$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ であるから

$$a_n=\frac{1}{3n-1}\quad \text{(答)}$$

（参考：別解）
漸化式の両辺を
$a_{n+1}a_n\,(\fallingdotseq 0)$ で割って

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}-3$$

よって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+3$

（以下同じ）