

もやらの数学「1日1題」

6 関数 $f(x) = x^{\sin x}$ ($x > 0$) の導関数を求めよ。

【数学Ⅲ「微分法」難易度 ★★★☆☆ (入試標準レベル)】

解説

x^x ($x > 0$) などの (関数)^(関数) は対数微分法 (両辺, 対数とってから微分)

$$\{\log f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ を利用!}$$

両辺は正であるから, 対数とって

$$\log f(x) = \log x^{\sin x}$$

$$\log f(x) = \sin x \log x$$

x で微分して,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \log x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \quad (\leftarrow \text{積の微分法})$$

よって,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= x^{\sin x} \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$