

## もやらの数学「1日1題」

8  $x$  は自然数,  $y$  は整数とする。不定方程式  $4x + 7y = 1$  の解を  $x$  の値が小さい順に並べるとき, 10 番目にある  $(x, y)$  を求めよ。

【数学A「整数」難易度 ★★☆☆☆ (入試基礎レベル)】

解説

$ax + by = c$  は

(1組の)整数解  $(x, y)$  を頑張って見つける!

$$aX = bY \quad (a, b : \text{互いに素}) \Leftrightarrow \begin{cases} X = bk \\ Y = ak \end{cases} \quad (k : \text{整数}) \text{ を利用!}$$

$$4x + 7y = 1 \dots \textcircled{1}$$

①の整数解の1つは  $(x, y) = (2, -1)$  より

(適当に代入して  
頑張って探す)

$$4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) = 1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } 4(x - 2) + 7(y + 1) = 0$$

$$\text{よって } 4(x - 2) = -7(y + 1)$$

4と7は互いに素であるから,  $k$  を整数として

$$\begin{cases} x - 2 = -7k \\ y + 1 = 4k \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = -7k + 2 \\ y = 4k - 1 \end{cases}$$

ここで,  $x$  が自然数となるのは,

$x$  が小さい順に  $k = 0, -1, -2, \dots$  のときであるから,

10 番目にあるのは,  $k = -9$  を代入したものである。

よって,

$$(x, y) = (65, -37) \quad (\text{答})$$