もやもの数学「１日１題」

9 次の関数の最大値，最小値を求めよ。(x の値は求めなくて良い)

$$y=2\sin^2 x+3\sin x\cos x+4\cos^2 x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$$

【数学Ⅱ「三角関数」難易度 ★★☆☆☆（入試基礎レベル）】

解説

$\sin^2 x$，$\cos^2 x$，$\sin x\cos x$ のみの式 (2 次同次式) は
2 倍角の公式の逆(半角の公式)で次数下げ！(パターン暗記必須)

$$\begin{cases} \sin 2x=2\sin x\cos x \text{ より } \sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2} \\ \cos 2x=1-2\sin^2 x \text{ より } \sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos 2x=2\cos^2 x-1 \text{ より } \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$y=2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+3\cdot\frac{\sin 2x}{2}+4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} \quad (\text{次数下げ})$$

$$=\frac{3}{2}\sin 2x+\cos 2x+3$$

$$=\frac{1}{2}(3\sin 2x+2\cos 2x)+3$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\sin(2x+\alpha)+3$$

$a\sin x+b\cos x$ は合成せよ！

$\left(\text{ただし，}\alpha \text{ は } \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}，\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}} \text{ をみたす}\right)$

$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\sin(2x+\alpha)+3$$

ここで，$-1\leqq\sin(2x+\alpha)\leqq 1$ であるから，

$$-\frac{\sqrt{13}}{2}\leqq\frac{\sqrt{13}}{2}\sin(2x+\alpha)\leqq\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$3-\frac{\sqrt{13}}{2}\leqq\frac{\sqrt{13}}{2}\sin(2x+\alpha)+3\leqq 3+\frac{\sqrt{13}}{2}$$

よって　最大値 $3+\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，最小値 $3-\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　(答)