1

次の条件 (a)，(b) を満たす凸多面体を考える。

(a)　面は正三角形または正方形である。

(b)　合同な 2 つの面は辺を共有しない。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　一つの頂点を共有する面の数は 4 であることを証明せよ。

(2)　正三角形と正方形の面の数をそれぞれ求めよ。

(3)　正八面体を平面で何回か切断することで条件 (a)，(b) を満たす凸多面体が得られる。どのように切断するか説明せよ。

(4)　(3) の切断で得られる凸多面体を F とし，F の 1 辺の長さは 1 とする。F のすべての正三角形の面に接する球を B とする。B と F の共通部分の体積を求めよ。

答　(1)　略　　(2)　正三角形 8 枚，正方形 6 枚　　(3)　略　　(4)　$\pi\left(\dfrac{81\sqrt{2}-32\sqrt{6}}{54}\right)$

解答

(1)　一つの頂点を共有する正三角形，正方形の面の数をそれぞれ a，b とする。

凸多面体より，一つの頂点に集まる内角の和は 360° 未満なので，

$$60^\circ \times a + 90^\circ \times b < 360^\circ$$

$$2a + 3b < 12$$

a，b は 0 以上の整数，$a+b \geqq 3$ より，

$(a, b) = (0, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$

合同な 2 つの面が辺を共有しないのは　$(a, b) = (2, 2)$

以上より，一つの頂点を共有する面の数は $a+b=4$ である。(証明終了)

凸多面体の一つの頂点を共有する面の数は「内角の和は 360° 未満」として考えるのが定石である。経験の有無で差が出る。

(2)　正三角形，正方形の面の数をそれぞれ x，y とする。

凸多面体の頂点，辺，面の数はそれぞれ，$\dfrac{3x+4y}{4}$，$\dfrac{3x+4y}{2}$，$x+y$ である。

オイラーの多面体定理より，

$$\frac{3x+4y}{4} - \frac{3x+4y}{2} + (x+y) = 2 \qquad \therefore x = 8$$

また，頂点の数について，$3x : 4y = 1 : 1$ であるから，

$$4y = 3x = 24 \qquad \therefore y = 6$$

以上より，**正三角形 8 枚，正方形 6 枚**　…(答)

「頂点」「辺」「面」の数はオイラーの多面体定理で考えると良い。この定理は同大学の2022年度の問題においても使用しているので，ほとんどの受験者は存在は知っていたはず。

(3)　正八面体の各辺の中点を通る平面で，6 個のすべてのかどを切り取る。… (答)

(4)　F は 1 辺の長さが 2 の正八面体 X において，(3) の切断によって得られる凸多面体である。また，B は X の内接球となる。

　求める体積は，球 B の体積から，(3) の切断により，B が切り取られる部分の体積を引いたものである。

まず，B の体積を求める。

B の半径を r，X の体積を V_1，X の表面積を S_1 とすると　$V_1=\dfrac{1}{3}S_1r$

$V_1=\dfrac{1}{3}\cdot2^2\cdot\sqrt{2}\times2=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$，$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin60^\circ\times8=8\sqrt{3}$ より，

$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{3}\cdot8\sqrt{3}\,r$　$\therefore r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって，B の体積 V_B は $V_B=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^3=\dfrac{8\sqrt{6}}{27}\pi$

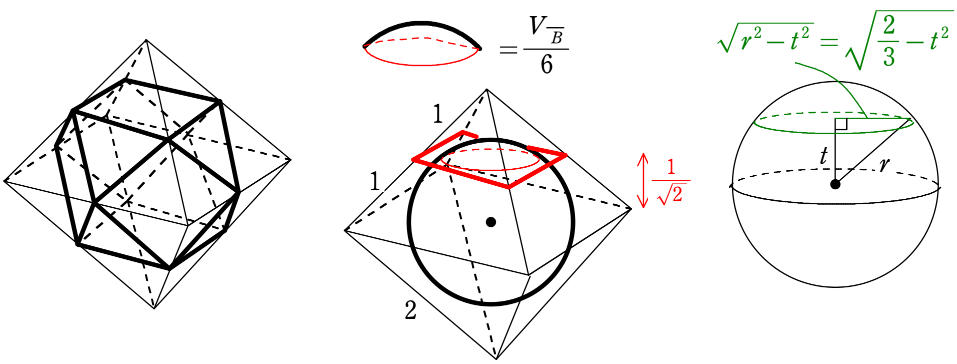
次に，B が切り取られる部分の体積 $V_{\overline{B}}$ を求める。

1 回の切断により B が切り取られる部分は，B の中心から高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から上の部分である。また，高さ t における B の断面積は $\pi\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}-t^2}\right)^2=\pi\left(\dfrac{2}{3}-t^2\right)$ であり，6 回の切断において，切り取られる部分の体積はすべて等しいので，

$$\frac{V_{\overline{B}}}{6}=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\pi\left(\frac{2}{3}-t^2\right)dt=\pi\left(\frac{4\sqrt{6}}{27}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\quad\therefore V_{\overline{B}}=\pi\left(\frac{8\sqrt{6}}{9}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

以上より，求める体積 V は，

$$V=V_B-V_{\overline{B}}=\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi-\pi\left(\frac{8\sqrt{6}}{9}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\pi\left(\frac{81\sqrt{2}-32\sqrt{6}}{54}\right)$$ … (答)



球 B の体積は簡単に求まるので，(3) の切断により切り取られる部分の体積を考えればよい。図のイメージさえできれば，手順は単純。

$\boxed{2}$

関数 $f(t)$，$g(t)$ は微分可能でその導関数は連続であり，導関数 $f'(t)$，$g'(t)$ の値は同時に 0 になることはないとする。

xy 平面上で媒介変数 t を用いて $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表される曲線 C を考える。C 上に点 $\mathrm{P}(f(t_0),\ g(t_0))$ をとる。ただし $t \fallingdotseq t_0$ ならば $(f(t),\ g(t)) \fallingdotseq (f(t_0),\ g(t_0))$ を満たすとする。P を通る直線 l を考える。C 上に P と異なる点 $\mathrm{Q}(f(t),\ g(t))$ をとり，Q から l に垂線をおろし，l との交点を H とする。ただし，Q が l 上にあるときは H＝Q とする。

(1) $\vec{n}$ は大きさ 1 の l に垂直なベクトルとする。

$$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$$

であることを証明せよ。

(2) l が P における C の接線であるための必要十分条件は，$\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=0$ であることを証明せよ。

答 (1) 略　(2) 略

解答

(1)

(ｉ) Q が l 上にないとき

(ア) $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のなす角が鋭角のとき

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\angle\mathrm{PQH}=1\times|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$

(イ) $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のなす角が鈍角のとき

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos(\pi-\angle\mathrm{PQH})=-|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\angle\mathrm{PQH}=-1\times|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=-|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$

(ii) Q が l 上にあるとき

H＝Q より $|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=|\vec{0}|=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}=0$ ($\because$ $\vec{n}\perp l$ より)

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$

(ｉ)，(ii) より $|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ (証明終了)

〈一応，場合分けをしたけどここまで丁寧に証明する必要はないかも。〉

(2) $f'(t_0)\fallingdotseq 0$ とする。

(十分性の証明) l が P における C の接線 $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=0$ を示す。

l が P における C の接線であるとき，
l の方向ベクトルは $(f'(t_0),\ g'(t_0))$ であるから，
$\vec{n}$ の方向ベクトル $\vec{n'}$ は $\vec{n'}=(g'(t_0),\ -f'(t_0))$ と表せる。

ここで，$\vec{n}=\dfrac{\vec{n'}}{|\vec{n'}|}$ であり，$\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{1}{|\vec{n'}|}\times\lim_{t\to t_0}\frac{|\vec{n'}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}$

よって，$\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{|\vec{n'}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=0$ を示せば十分である。

$\left(\because f'(t_0)\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0 \text{ から } |\vec{n'}|=\sqrt{\{g'(t_0)\}^2+\{f'(t_0)\}^2}\neq 0\right)$

$\overrightarrow{PQ}=(f(t)-f(t_0),\ g(t)-g(t_0))$ より
$\vec{n'}\cdot\overrightarrow{PQ}=g'(t)\{f(t)-f(t_0)\}-f'(t)\{g(t)-g(t_0)\}$
$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\{(f(t))-f(t_0)\}^2+\{g(t)-g(t_0)\}^2}$

よって，

$$\frac{|\vec{n'}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{|g'(t)\{f(t)-f(t_0)\}-f'(t)\{g(t)-g(t_0)\}|}{\sqrt{\{(f(t))-f(t_0)\}^2+\{g(t)-g(t_0)\}^2}}$$
$$=\frac{\left|g'(t)-f'(t)\dfrac{g(t)-g(t_0)}{f(t)-f(t_0)}\right|}{\sqrt{1+\left\{\dfrac{g(t)-g(t_0)}{f(t)-f(t_0)}\right\}^2}}$$

ここで，

$$\frac{g(t)-g(t_0)}{f(t)-f(t_0)}=\frac{\dfrac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}}{\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}}$$ より $\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{g(t)-g(t_0)}{f(t)-f(t_0)}=\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$ ［微分係数の定義］

よって，

$$\lim_{t\to t_0}\frac{|\vec{n'}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{\left|g'(t_0)-f'(t_0)\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right|}{\sqrt{1+\left\{\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right\}^2}}=\frac{|g'(t_0)-g'(t_0)|}{\sqrt{1+\left\{\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right\}^2}}=0$$ （$\Longrightarrow$の証明終了）

（必要性の証明）$\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{|\overrightarrow{QH}|}{|\overrightarrow{PQ}|}=0\Longrightarrow l$ が P における C の接線 を示す。

$\vec{n}=(a,\ b)$ とする。
$\overrightarrow{PQ}=(f(t)-f(t_0),\ g(t)-g(t_0))$ より
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=a\{f(t)-f(t_0)\}+b\{g(t)-g(t_0)\}$
$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\{(f(t))-f(t_0)\}^2+\{g(t)-g(t_0)\}^2}$

(十分性) のときと同様にして，$\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=\frac{\left|a+b\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right|}{\sqrt{1+\left\{\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right\}^2}}$ を得る。

$\displaystyle\lim_{t\to t_0}\frac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=0$ のとき $\dfrac{\left|a+b\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right|}{\sqrt{1+\left\{\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right\}^2}}=0$ より　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{-g'(t_0)}{f'(t_0)}$

よって，$\vec{n}=(a,\ b)=k(-g'(t_0),\ f'(t_0))$　(k：実数) と表せ，

$\vec{n}\perp l$ より，l の方向ベクトルは $(f'(t),\ g'(t))$ と表せる。

よって，l は P における C の接線である。　($\Longleftarrow$ の証明終了)

$g'(t_0)\fallingdotseq 0$ のときも同様である。

以上より，題意が示された。　(証明終了)

- (十分性)　(1) より，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ と $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を考えた。

  P と Q の座標(成分)は分かっているので，$\vec{n}$ の成分に着目して進めた。

- $g'(t_0)\fallingdotseq 0$ のときは

$$\frac{|\vec{n}'\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=\frac{|g'(t)\{f(t)-f(t_0)\}-f'(t)\{g(t)-g(t_0)\}|}{\sqrt{\{(f(t))-f(t_0)\}^2+\{g(t)-g(t_0)\}^2}}$$
$$=\frac{\left|g'(t)\dfrac{f(t)-f(t_0)}{g(t)-g(t_0)}-f'(t)\right|}{\sqrt{\left\{\dfrac{f(t)-f(t_0)}{g(t)-g(t_0)}\right\}^2+1}}$$

  として進めればOK

- 微分係数の定義を用いた極限の計算に気付けるかどうかが分かれ目か。

3

z は 0 でない複素数とする。0 以上の整数 n に対して，$a_n=z^n+\overline{z^n}$ とおく。ここで $\overline{z}$ は z と共役な複素数である。

(1) a_n は実数であることを証明せよ。

(2) $z=1+i$ とする。ただし，i は虚数単位である。0 以上の整数 k に対して，a_{4k}，a_{4k+1}，a_{4k+2}，a_{4k+3} を求めよ。

(3) 次の条件を満たす z をすべて求めよ。
条件：0 以上のすべての整数 k に対して $a_{6k}=a_{6k+2}$

答 (1) 略　(2) $a_{4k}=2\cdot(-4)^k$，$a_{4k+1}=2\cdot(-4)^k$，$a_{4k+2}=0$，$a_{4k+3}=(-4)^{k+1}$

(3) $z=\pm1$，$\dfrac{\pm\sqrt{6}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$

解答

(1) $\overline{a_n}=\overline{z^n+\overline{z^n}}=\overline{z^n}+z^n=a_n$

よって，a_n は実数。（証明終了）

(2) $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ より　$a_n=2(\sqrt{2})^n\cos\dfrac{n\pi}{4}$

$a_{4k}=2(\sqrt{2})^{4k}\cos k\pi=2\cdot4^k\cdot(-1)^k=\mathbf{2\cdot(-4)^k}$

$a_{4k+1}=2(\sqrt{2})^{4k+1}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)=2\sqrt{2}\cdot4^k\cdot\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{2}}=\mathbf{2\cdot(-4)^k}$

$a_{4k+2}=2(\sqrt{2})^{4k+2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=\mathbf{0}$

$a_{4k+3}=2(\sqrt{2})^{4k+3}\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi+k\pi\right)=4\sqrt{2}\cdot4^k\cdot\dfrac{-(-1)^k}{\sqrt{2}}=-4\cdot(-4)^k=\mathbf{(-4)^{k+1}}$

(3) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ -\pi<\theta\leqq\pi)$とすると　$a_n=2r^n\cos n\theta$

$a_{6k}=2r^{6k}\cos6k\theta$，$a_{6k+2}=2r^{6k+2}\cos(6k+2)\theta$ であるから，

$a_{6k}=a_{6k+2}$ は，

$$2r^{6k}\cos6k\theta=2r^{6k+2}\cos(6k+2)\theta$$

$$\cos6k\theta=r^2\cos(6k+2)\theta \quad \cdots①$$

これがすべての整数 k で成り立つので，$k=0$ として，

$$\cos0=r^2\cos2\theta$$

$$\therefore\ r^2\cos2\theta=1 \quad \cdots②$$ であることが必要。

① より　$\cos6k\theta=r^2\cos(6k+2)\theta$

$=r^2(\cos6k\theta\cos2\theta-\sin6k\theta\sin2\theta)$

$=\cos6k\theta-r^2\sin6k\theta\sin2\theta$　（$\because$ ② より）

よって　$\sin6k\theta\sin2\theta=0$

したがって，$k=1$ のとき，l，m を整数として，

$6\theta=l\pi$ または $2\theta=m\pi$ すなわち，$\theta=\dfrac{l}{6}\pi$ であることが必要。

$-\pi<\theta\leqq\pi$ より，l は $-5\leqq l\leqq 6$ の整数である。

このとき，② より，$r^2\cos\dfrac{l\pi}{3}=1\quad\cdots(☆)$

ここで，$r^2>0$ より，$\cos\dfrac{l\pi}{3}>0$ すなわち $l=-5,\ -1,\ 0,\ 1,\ 5,\ 6$ であることが必要。

（ア） $l=0$ のとき　$\theta=0$

(☆) より　$r^2=1\quad\therefore r=1$

このとき，$z=1$　より　$a_n=1^n+1^n=2$

$a_{6k}=a_{6k+2}=2$

よって，条件を満たす。

（イ） $l=\pm1$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{6}$

(☆) より　$r^2\cdot\dfrac{1}{2}=1\quad\therefore\ r=\sqrt{2}$

このとき　$z=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$a_n=2(\sqrt{2})^n\cos\dfrac{n\pi}{6}$ より

$a_{6k}=2(\sqrt{2})^{6k}\cos k\pi=2\cdot8^k\cdot(-1)^k=2\cdot(-8)^k$

$a_{6k+2}=2(\sqrt{2})^{6k+2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right)=2\cdot2\cdot8^k\cdot\dfrac{(-1)^k}{2}=2\cdot(-8)^k=a_{6k}$

よって，条件を満たす。

このとき　$z=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i}{2}$

（ウ） $l=\pm5$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{5}{6}\pi$

(☆) より　$r^2\cdot\dfrac{1}{2}=1\quad\therefore\ r=\sqrt{2}$

このとき　$z=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{5}{6}\pi\right)\right\}$

$a_n=2(\sqrt{2})^n\cos\dfrac{5n\pi}{6}$ より

$a_{6k}=2(\sqrt{2})^{6k}\cos5k\pi=2\cdot8^k\cdot(-1)^k=2\cdot(-8)^k$

$a_{6k+2}=2(\sqrt{2})^{6k+2}\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi+5k\pi\right)=2\cdot2\cdot8^k\cdot\dfrac{(-1)^k}{2}=2\cdot(-8)^k=a_{6k}$

よって，条件を満たす。

このとき　$z=\dfrac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i}{2}$

(エ)　$l=6$ のとき　$\theta=\pi$

(☆) より　$r^2=1$　$\therefore r=1$

このとき，$z=-1$ より　$a_n=2\cdot(-1)^n$

$a_{6k}=a_{6k+2}=2$

よって，条件を満たす。

(ア)，(イ)，(ウ)，(エ) より　$z=\pm 1,\ \dfrac{\pm\sqrt{6}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$ (複号任意)　…(答)

- 周期性から，条件を満たすためには動径が $\dfrac{\pi}{6}$ 関係である必要があることが推測できるので，まずそれを示した。
- $6\theta=l\pi$ または $2\theta=m\pi \iff \theta=\dfrac{l\pi}{6}$ または $\theta=\dfrac{m\pi}{2}$
  $\iff \theta$ は 30° の整数倍 または 90° の整数倍
  $\iff \theta$ は 30°の整数倍
- l を絞り込んだあとは，実際に z を求め，$a_{6k}=a_{6k+2}$ を満たすか確認していく。

4

a，b は $0<b<1<a$ を満たす実数とする。xy 平面上で方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$$

で表される楕円を C とする。C と同じ焦点をもち，点 $(b,\ 0)$ を通る双曲線を D とする。C と D の共有点のうち第 1 象限にあるものを P とし，その x 座標を s とする。C で囲まれる部分と領域 $0\leqq x\leqq s$ との共通部分を K とし，直線 $x=s$ と D で囲まれる部分を L とする。K と L を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_K，V_L とする。

(1) s を a，b を用いて表せ。

(2) 点 P における C の接線と D の接線は垂直であることを証明せよ。

(3) V_k を a，b を用いて表せ。

(4) $s=1$ であるとき，極限 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V_L}{V_K}$ を求めよ。

答 (1) $s=ab$　(2) 略　(3) $V_K=\dfrac{\pi ab(a^2-1)(3-b^2)}{3}$　(4) $\dfrac{1}{3}$

解答

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$　$\cdots$①

楕円 C の焦点は $\sqrt{a^2-(a^2-1)}=1$ より　$(\pm1,\ 0)$

よって，双曲線 D の方程式は　$\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{1-b^2}=1$　$\cdots$②

① より　$y^2=(a^2-1)\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$　$\cdots$③

②，③ より，

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{a^2-1}{1-b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=1$$

$$\left\{\frac{1}{b^2}+\frac{a^2-1}{a^2(1-b^2)}\right\}x^2=1+\frac{a^2-1}{1-b^2}$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2b^2(1-b^2)}x^2=\frac{a^2-b^2}{1-b^2}$$

$$x^2=a^2b^2$$

$$x=\pm ab$$

$s>0$ より　$\boldsymbol{s=ab}$　$\cdots$(答)

(2) 交点の y 座標について，③より，$x=s=ab$ として，

$y^2=(a^2-1)(1-b^2)$ より　$y=\sqrt{(a^2-1)(1-b^2)}$

よって，点 $\left(ab,\ \sqrt{(a^2-1)(1-b^2)}\right)$ における，C，D の接線 l_C，l_D の方程式は，

$l_C : \dfrac{ab}{a^2}x + \dfrac{\sqrt{(a^2-1)(1-b^2)}}{a^2-1}y = 1$　すなわち　$\dfrac{b}{a}x + \dfrac{\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{a^2-1}}y = 1$

$l_D : \dfrac{ab}{b^2}x - \dfrac{\sqrt{(a^2-1)(1-b^2)}}{1-b^2}y = 1$　すなわち　$\dfrac{a}{b}x - \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{1-b^2}}y = 1$

それぞれの傾きを m_C，m_D とすると，

$m_C = -\dfrac{b\sqrt{a^2-1}}{a\sqrt{1-b^2}}$，$m_D = \dfrac{a\sqrt{1-b^2}}{b\sqrt{a^2-1}}$

よって，$m_C \times m_D = -\dfrac{b\sqrt{a^2-1}}{a\sqrt{1-b^2}} \times \dfrac{a\sqrt{1-b^2}}{b\sqrt{a^2-1}} = -1$

よって，$l_C \perp l_D$ となり，題意が示された。　(証明終了)

(3)　③より，

$$V_K = \int_0^s \pi y^2 dx$$
$$= \pi \int_0^{ab} (a^2-1)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$
$$= \pi(a^2-1)\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^{ab}$$
$$= \pi(a^2-1)\left(ab - \frac{ab^3}{3}\right)$$
$$= \frac{\pi ab(a^2-1)(3-b^2)}{3}$$
…(答)

(4)　② より　$y^2 = (1-b^2)\left(\dfrac{x^2}{b^2} - 1\right)$

よって，$s = ab = 1$ のとき，

$$V_L = \int_b^s \pi y^2 dx$$
$$= \pi \int_b^1 (1-b^2)\left(\frac{x^2}{b^2} - 1\right) dx$$
$$= \pi(1-b^2)\left[\frac{x^3}{3b^2} - x\right]_b^1$$
$$= \pi(1-b^2)\left\{\left(\frac{1}{3b^2} - 1\right) - \left(\frac{b}{3} - b\right)\right\}$$
$$= \pi(1-b^2)\left(\frac{1}{3b^2} - 1 + \frac{2b}{3}\right)$$
$$= \pi\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{3} - 1 + \frac{2}{3a}\right)$$

また，

$$V_K = \frac{\pi}{3}(a^2-1)\left(3 - \frac{1}{a^2}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{V_L}{V_K} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{1}{3}$　…(答)

【講評】

$\boxed{1}$ [空間図形（多面体），積分法]（やや難）

京府医特有の多面体に関する問題。同種の問題の経験の有無で差がつく。特に⑴⑵は初見だと解答しにくい。⑶は難しくないので，⑶を先に解けば⑵の結果は分かる。

⑷は図のイメージができれば方針は立つだろう。

$\boxed{2}$ [ベクトル，微分法（極限）]（やや難）

媒介変数表示の曲線に関する問題。「導関数 $f'(t)$，$g'(t)$ の値は同時に 0 になることはない」の扱い方が初見だと難しい。ちなみに，同時に 0 になると，その点でとんがったようなグラフになる。

$\boxed{3}$ [数列，複素数平面]（やや難）

複素数平面と数列の融合問題。イメージができないときは具体的に数値を入れて考えると良い。

$\boxed{4}$ [式と曲線，積分法]（易）

共焦点の楕円と双曲線に関する出題。特に難しい計算もなく絶対に落とせない。

＜全体＞

すべての大問において「数学Ⅲ」を含んでいる。2022年度に比べて難化。突出して難しい問題はないが，全体的に完答しにくい問題セットとなっている。そのため，$\boxed{4}$ での失点は大きく響くだろう。最も経験の差による影響が出るのが $\boxed{1}$ であり，多面体の対策がどこまでできたかが合否を分ける可能性がある。

$\boxed{4}$ を完答し，$\boxed{1}$⑵⑶，$\boxed{2}$⑴，$\boxed{3}$⑴⑵ で確実に得点したい。それ以外の問題で，どこまで稼げたかの勝負になる。目標は 50 ～ 55 ％ くらいか。