$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

解答

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\qquad\left[\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\right]$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\qquad[\Sigma(a_k-a_{k+2})\text{ の形}]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3n^2+5n}{2n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(3n+5)}{4n(n+1)(n+2)}\quad\cdots\text{（答）}$$