x を正の実数とし，座標平面上に 3 点 A$(x,\ 0)$，B$(-2,\ 2)$，C$(-3,\ 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\tan\theta$ を x で表せ。

(2) $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

【北海道大学】

答 (1) $\dfrac{x}{x^2+5x+12}$ (2) $x=2\sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}$

解答

(1) 直線 AB，直線 AC の x 軸とのなす角をそれぞれ β，γ とすると，

$$\tan\beta=\frac{-2}{x+2},\quad \tan\gamma=\frac{-3}{x+3}$$

$$\tan\theta=\tan(\beta-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}=\frac{\dfrac{-2}{x+2}-\dfrac{-3}{x+3}}{1+\dfrac{-2}{x+2}\cdot\dfrac{-3}{x+3}}=\boldsymbol{\frac{x}{x^2+5x+12}}\quad\cdots(答)$$

(2) $$\tan\theta=\frac{x}{x^2+5x+12}=\frac{1}{x+\dfrac{12}{x}+5}$$

ここで，$x>0$，$\dfrac{12}{x}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均) から

$$x+\frac{12}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{12}{x}}=4\sqrt{3}$$

等号は $x=\dfrac{12}{x}$ かつ $x>0$ すなわち $x=2\sqrt{3}$ のとき成り立つ。

以上より，$\tan\theta$ は，**$x=2\sqrt{3}$ のとき最大値** $\dfrac{1}{4\sqrt{3}+5}=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}}$ $\cdots$(答)