# 例題１　「長方形と長方形ではさむ」　解答

$n$ を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　次の不等式が成り立つことを示せ。

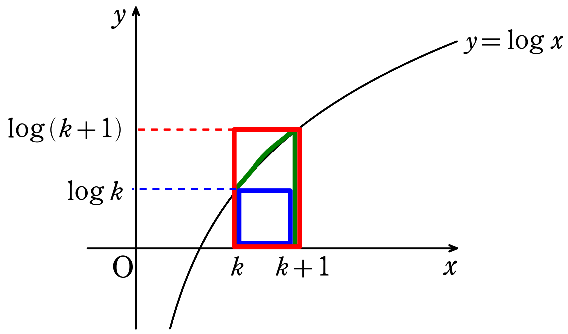
$$n\log n - n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \log k < (n+1)\log n - n + 1$$

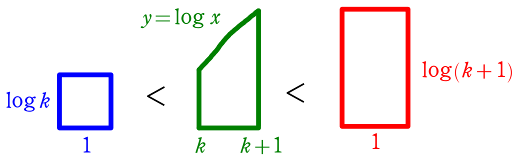
(2)　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n\log n}$$

解答

(1)




グラフより，面積を比較して，

$$\log k < \int_k^{k+1} \log x\,dx < \log(k+1) \quad \cdots (☆)$$

(ア) (☆) の (左辺) < (中辺) において，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ を代入して辺々足すと，

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < \int_1^n \log x\,dx \quad \left[\int_1^2 + \int_2^3 + \cdots + \int_{n-1}^n = \int_1^n\right]$$

$\displaystyle\int_1^n \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^n = n\log n - n + 1$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{n} \log k - \log n < n\log n - n + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \log k < (n+1)\log n - n + 1 \quad \cdots ①$$　[示したい不等式の (中辺)<(右辺)]

(イ) (☆) の (中辺) < (右辺) において，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ を代入して辺々足すと，

$$\int_1^n \log x\,dx < \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$$

$$n\log n - n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \log k - \log 1$$

$$\therefore n\log n - n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \log k \quad \cdots ②$$　[示したい不等式の (左辺)<(中辺)]

①，②より，

$$n\log n - n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \log k < (n+1)\log n - n + 1 \quad \text{（証明終了）}$$

(2) $\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k$ であるから，(1) の結果より，

$$\frac{n\log n - n + 1}{n\log n} < \frac{\log(n!)}{n\log n} < \frac{(n+1)\log n - n + 1}{n\log n}$$

$$1 - \frac{1}{\log n} + \frac{1}{n\log n} < \frac{\log(n!)}{n\log n} < \frac{n+1}{n} - \frac{1}{\log n} + \frac{1}{n\log n}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\log n} + \frac{1}{n\log n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n} - \frac{1}{\log n} + \frac{1}{n\log n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{\log n} + \frac{1}{n\log n}\right) = 1$$

であるから，はさみちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n\log n} = 1 \quad \cdots \text{(答)}$$