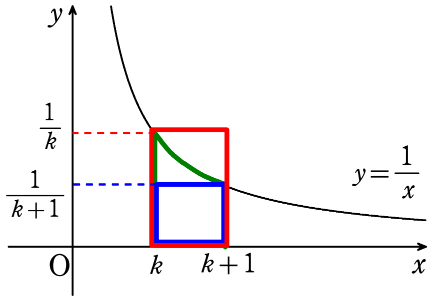
例題２　「長方形と台形ではさむ」　解答

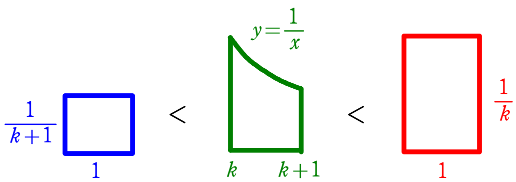
次の不等式を証明せよ。ただし，n は自然数とする。

(1) $\dfrac{1}{k+1} < \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)$

(2) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n > \dfrac{1}{2}$

(1)　(失敗例)





グラフより，面積を比較して，

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k}$$

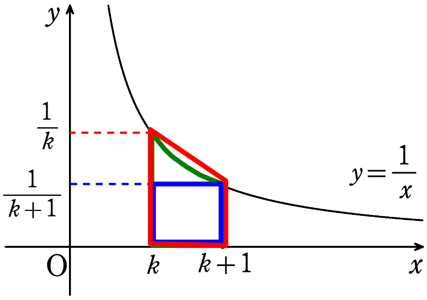
ここからどう頑張っても，与えられた不等式を示すことはできない。

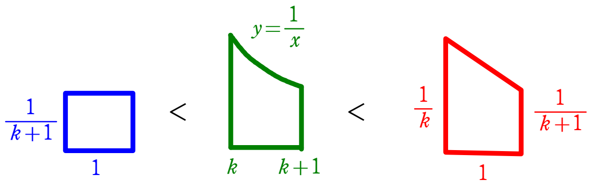
長方形ではさんでも示すことができない
→もっと厳しく評価する必要がある
→長方形ではなく**台形**ではさんでみる！

正しい解答は次のページ

解答

(1)





グラフより，面積を比較して，

$$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

よって，

$$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\quad\cdots(☆)$$ （証明終了）

(2)　$n\geqq 2$ のとき

(☆)の(中辺) < (右辺)について，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ を代入して辺々足すと，

$$\int_1^n\frac{1}{x}\,dx<\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$\Big[\log x\Big]_1^n<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

よって，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$>\frac{1}{2}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

以上より，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n>\frac{1}{2}$$ （証明終了）

（補足）

・$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ を代入していくが，$n-1\geqq 1$ である必要があるため $n\geqq 2$ として進めた。$n=1$ のときは別個に確認。