x を正の実数とし，座標平面上に 3 点 A $(x,\ 0)$，B $(-2,\ 2)$，C $(-3,\ 3)$ をとる。
直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\tan\theta$ を x で表せ。

(2) $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

【北海道大学】

答 (1) $\dfrac{x}{x^2+5x+12}$ (2) $\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}$

直線のなす角は
$\tan\alpha=$(傾き)
を利用！（定石）

※α は直線と x 軸の正の向きのなす角

解答

(1) 直線 AB，直線 AC の x 軸とのなす角をそれぞれ β，γ とすると，

$$\tan\beta=\frac{-2}{x+2},\quad \tan\gamma=\frac{-3}{x+3}\qquad [\tan\alpha=(\text{傾き})]$$

$$\tan\theta=\tan(\beta-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}=\frac{\dfrac{-2}{x+2}-\dfrac{-3}{x+3}}{1+\dfrac{-2}{x+2}\cdot\dfrac{-3}{x+3}}=\frac{x}{x^2+5x+12}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) $$\tan\theta=\frac{x}{x^2+5x+12}=\frac{1}{\boxed{x+\dfrac{12}{x}}+5}$$

(相加平均)≧(相乗平均)を使うための変形をしている。

ここで，$x>0$，$\dfrac{12}{x}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均) から

$$x+\frac{12}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{12}{x}}=4\sqrt{3}$$

等号は $x=\dfrac{12}{x}$ かつ $x>0$ すなわち $x=2\sqrt{3}$ のとき成り立つ。

以上より，$\tan\theta$ は，$x=2\sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4\sqrt{3}+5}=\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}$ $\cdots$(答)

最大値，最小値 (1 変数)は

× ・2 次関数 → 平方完成

〇？ $\left\{\begin{array}{l}\text{正の数の和}\\ ○+\dfrac{\text{定数}}{○}\end{array}\right.$ → (相加平均)≧(相乗平均)

× ・$a\sin\theta+b\cos\theta$ → 合成

・その他 → 微分して増減表

（定石）