2023年度　奈良県立医科大学　一般後期　数学　解答（速報版）

1　xy 平面上の楕円

$$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,\ b>0)$$

について以下の問に答えよ．

（1）m，t を実数とする．直線 $y=mx+t$ ち楕円 C とが相異なる2点を共有するために m，t の満たすべき必要十分条件を求めよ．

（2）（1）において m を固定し，傾き m の直線 l_1：$y=mx+t$ が C と相異なる2点を共有するように t を動かす．直線 l_1 と楕円 C との2つの共有点のうち，x 座標の小さい方を $\mathrm{P}(t)$，x 座標の大きい方を $\mathrm{Q}(t)$ とする．t を動かしたとき，線分 $\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)$ の中点はある直線上にあることを証明せよ．

答（1）$-\sqrt{a^2m^2+b^2}<t<\sqrt{a^2m^2+b^2}$　（2）略

解答

（1）$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=mx+t\end{cases}$

y を消去して整理すると，

$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mtx+a^2(t^2-b^2)=0$ …①

判別式 $D>0$ より，

$$\frac{D}{4}=a^4m^2t^2-a^2(a^2m^2+b^2)(t^2-b^2)>0$$

$$a^2m^2t^2-(a^2m^2+b^2)(t^2-b^2)>0\quad [a^2>0\text{ で割った}]$$

$$-b^2t^2+b^2(a^2m^2+b^2)>0$$

$$-t^2+a^2m^2+b^2>0\quad [b^2>0\text{ で割った}]$$

よって，$t^2<a^2m^2+b^2$

$$\therefore -\sqrt{a^2m^2+b^2}<t<\sqrt{a^2m^2+b^2}\quad\cdots（答）$$

（2）$\mathrm{P}(t)$，$\mathrm{Q}(t)$ の x 座標をそれぞれ α，β とすると，

α，β は①の2解であるから，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{2a^2mt}{a^2m^2+b^2}$$

よって，$\mathrm{P}(t)$，$\mathrm{Q}(t)$ の中点を $(X,\ Y)$ とすると，

$$\begin{cases}X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{a^2mt}{a^2m^2+b^2}\ \cdots②\\ Y=mX+t\ \cdots③\end{cases}$$

②より　$t=-\dfrac{a^2m^2+b^2}{a^2m}X$ …④

③ に代入して，

$$Y = mX - \frac{a^2m^2+b^2}{a^2m}X$$

$$= -\frac{b^2}{a^2m}X \quad \cdots ⑤$$

ここで，(1) の結果と ④から，

$$-\sqrt{a^2m^2+b^2} < -\frac{a^2m^2+b^2}{a^2m}X < \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

よって　$-\dfrac{a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}} < X < \dfrac{a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}} \quad \cdots ⑥$

⑤，⑥ より，

P(t)，Q(t) の中点は

直線 $y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x \quad \left(-\dfrac{a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}} < x < \dfrac{a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$ 上にある．（証明終了）

2023年度　奈良県立医科大学　一般後期　数学　解答（速報版）

2　整数 $k\ (k \geqq 2)$ を一つ固定する．正整数 n に対して， k 次の方程式

$$(E)_n:\ x^k + nx^{k-1} - (n+2) = 0$$

を与える．

(1) すべての正整数 n に対して，方程式 $(E)_n$ は正の整数をただ一つしか持たないことを証明せよ．

(2) 各正整数 n に対して，(1) における正の解を a_n とおく． $n \to \infty$ のとき数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．

答 (1) 略　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

解答

(1)　$f(x) = x^k + nx^{k-1} - (n+2)\quad (x \geqq 0)$ すると，

$f'(x) = kx^{k-1} + n(k-1)x^{k-2} \geqq 0$ より，

$f(x)$ は $x > 0$ で単調増加．

ここで， $f(0) = -(n+2) < 0$ ， $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であるから，

$f(x) = 0$ は $x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつ．（証明終了）

(2)　$x^k + nx^{k-1} - (n+2) = 0$

$\Leftrightarrow x^k = -nx^{k-1} + n + 2$

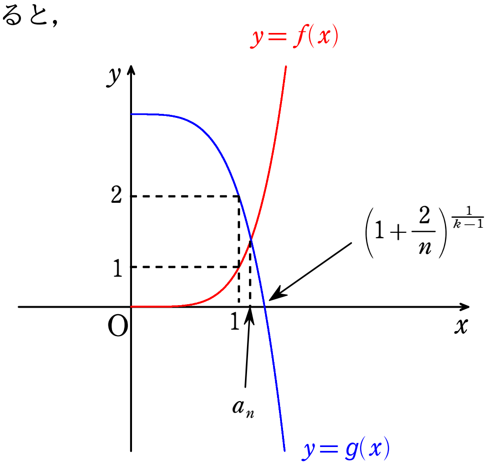
$g(x) = x^k\ (x > 0)$， $h(x) = -nx^{k-1} + n + 2\ (x > 0)$ とすると，

a_n は， $y = g(x)$ と $y = h(x)$ の共有点の x 座標である。

$x > 0$ において， $g(x)$ は単調増加， $h(x)$ は単調減少。

また， $g(1) = 1$ ， $h(1) = 2 > g(1)$ に注意すると，

グラフは右下の図のようになる．



また， $h(x) = 0$ とすると，

$$x^{k-1} = \frac{n+2}{n}$$

$$x = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

グラフより，

$$1 < a_n < \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

であり， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{k-1}} = 1$

はさみうちの原理より， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ （収束）　…（答）

2023年度　奈良県立医科大学　一般後期　数学　解答（速報版）

3　実数に対して以下の条件 (G) を考える．

● 条件 (G)：不等式 $[3xyz] < x^3 + y^3 + z^3 + a$ が任意の正の実数 x，y，z に対して成り立つ．(ただし，実数 r に対して $[r]$ は r 以上の整数の中で最小のものを表す．)

(1)　$a \geqq 1$ ならば，a は条件 (G) を満たすことを証明せよ．

(2)　条件 (G) を満たす実数 a の中で，$a = 1$ は最小であることを証明せよ．

答

解答

(1)　$3xyz \leqq [3xyz] < 3xyz + 1$ であるから，

$$
\begin{aligned}
& x^3 + y^3 + z^3 + a - [3xyz] \\
& > x^3 + y^3 + z^3 + a - (3xyz + 1) \\
& = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + a - 1 \\
& = \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)\} + a - 1 \\
& = \frac{1}{2}(x + y + x)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} + a - 1 \\
& \geqq 0 + 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

よって，$a \geqq 1$ のとき，任意の正の実数 x，y，z に対して，

$$[3xyz] < x^3 + y^3 + z^3 + a$$

が成り立つ．（証明終了）

(2)　$x = y = z = \dfrac{1}{n}$ $(n > 2)$ とすると，

$$x^3 + y^3 + z^3 + a - [3xyz] = \frac{3}{n^3} - \left[\frac{3}{n^3}\right] + a$$

$0 < \dfrac{3}{n^3} < 1$ より，$\left[\dfrac{3}{n^3}\right] = 1$

よって，

$$x^3 + y^3 + z^3 + a - [3xyz] = \frac{3}{n^3} - 1 + a$$

また，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{3}{n^3} = 0$ であるから，

任意の正の実数 x，y，z に対して，$[3xyz] < x^3 + y^3 + z^3 + a$

$\Leftrightarrow -1 + a \geqq 0$

$\Leftrightarrow a \geqq 1$

以上より，条件 (G) を満たす実数 a の中で，$a = 1$ は最小である．（証明終了）

2023年度　奈良県立医科大学　一般後期　数学　解答（速報版）

4　実数 r に対して $[r]$ は r 以下の整数の中で最大のものを表す．正整数 m に対して $n_1=[\sqrt{m}\,]$ とおく．次に $n_2=\left[\sqrt{m-{n_1}^2}\,\right]$ とおく．同様に整数 $n_i\,(i>1)$ を帰納的に $n_i=\left[\sqrt{m-{n_1}^2-\cdots-{n_{i-1}}^2}\,\right]$ と定める．すると正整数 m は l 個の平方数 ${n_i}^2\,(i=1,\ \cdots,\ l)$ の和として，

$$m={n_1}^2+{n_2}^2+\cdots+{n_l}^2,\quad n_i>0\,(i=1,\ \cdots,\ l)$$

のように一意に表せる．このとき $l(>0)$ は m により定まる関数であり，$l=l(m)$ とおく．例えば $5=2^2+1^2$ なので $l(5)=2$ である．

(1)　$m(>1)$ が平方数 $m=k^2$ (k は正整数) ならば，$l(m)\neq l(m-1)$ となることを証明せよ．

(2) 2以上の任意の正整数 m に対して，$l(m)\neq l(m-1)$ となることを証明せよ．

(3) $l(a)=5$ となる最小の正整数 a，$l(b)=6$ となる最小の正整数 b，$l(c)=7$ となる最小の正整数 c を求めよ．

答 (1) 略　(2) 略　(3) $(a,\ b,\ c)=(23,\ 167,\ 7223)$

解答

(1)　$m(>1)$ が平方数 $m=k^2$ (k は正整数) のとき，
$l(m)=l(m-1)$ となると仮定する．【背理法】
m が平方数のとき $l(m)=1$ であるから $l(m-1)=1$ となる．
このとき，
$m-1=k^2-1=A^2$ (A は正整数) と表せるので，
$(k+A)(k-A)=1 \cdots ①$　となる．
ここで，$k+A>1$ であるから，① は k と A が正整数であることに矛盾する．
よって，$l(m)\neq l(m-1)$ である．（証明終了）

(2)　m が平方数のとき (2) より，$l(m)\neq l(m-1)$ であるから，m が平方数でないときを考える．
$l(m)=l(m-1)=\alpha$ となる平方数でない2以上の正整数 m が存在すると仮定する．
【背理法】

$$m={n_1}^2+{n_2}^2+\cdots+{n_\alpha}^2,\quad n_i>0\,(i=1,\ \cdots,\ \alpha)$$

$$m-1={n_1}'^2+{n_2}'^2+\cdots+{n_\alpha}'^2,\quad n_i>0\,(i=1,\ \cdots,\ \alpha)$$

と表せる．m が平方数でないので，
$[\sqrt{m}\,]=[\sqrt{m-1}\,]$ より　$n_1={n_1}'$ である．
次に，

$n_2=[\sqrt{m-n_1{}^2}]$

$n_2'=[\sqrt{(m-1)-n_1'^2}]=[\sqrt{(m-n_1{}^2)-1}]$

ここで，

$m-n_1{}^2$ が平方数のとき，$l(m)=2$，$l(m-1)>2$

$(m-n_1{}^2)-1$ が平方数のとき，$l(m)>2$，$l(m-1)=2$

となるので，$m-n_1{}^2$，$(m-n_1{}^2)-1$ はいずれも平方数とはならない．

よって，$n_2=n_2'$ である．

同様にして，$m-n_1{}^2-\cdots-n_{i-1}{}^2$，$(m-n_1{}^2-\cdots-n_{i-1}{}^2)-1$ $(i=1, \cdots, \alpha-1)$ は平方数とはならず，

$n_i=n_i'$ $(i=1, \cdots, \alpha-1)$ を得る．

最後に，

$n_\alpha=[\sqrt{m-n_1{}^2-\cdots-n_{\alpha-1}{}^2}]$ について，

$l(m)=\alpha$ より，$m-n_1{}^2-\cdots-n_{\alpha-1}{}^2$ は平方数である．

一方，

$n_\alpha'=[\sqrt{(m-n_1{}^2-\cdots-n_{\alpha-1}{}^2)-1}]$について，

$l(m-1)=\alpha$ より，$(m-n_1{}^2-\cdots-n_{\alpha-1}{}^2)-1$ も平方数となるが，

(1) の議論により，(平方数)-1 が平方数となることはないので矛盾する．

よって，$l(m)\neq l(m-1)$ である．（証明終了）

(3) いきなり解答に入ると，意味が分からなくなりそうなので実験しました。

例えば $m=6$ のとき

$n_1=[\sqrt{6}]=2$，$n_2=[\sqrt{2}]=1$，$n_3=[\sqrt{1}]=1$ よって，$l(6)=3$．

これを次のように表記することにします．

$m=6:[\sqrt{6}]\to[\sqrt{2}]\to[\sqrt{1}]=1$　$l(6)=3$

では，順番に実験してみます．（不要なら飛ばして下さい）

$m=1:[\sqrt{1}]=1$	$l(1)=1$
$m=2:[\sqrt{2}]\to[\sqrt{1}]=1$	$l(2)=2=1+l(1)$
$m=3:[\sqrt{3}]\to[\sqrt{2}]\to[\sqrt{1}]=1$	$l(3)=3=1+l(2)$
$m=4:[\sqrt{4}]=2$	$l(4)=1$
$m=5:[\sqrt{5}]\to[\sqrt{1}]=1$	$l(5)=2=1+l(1)$
$m=6:[\sqrt{6}]\to[\sqrt{2}]\to\sqrt{1}=1$	$l(6)=3=1+l(2)$
$m=7:[\sqrt{7}]\to[\sqrt{3}]\to[\sqrt{2}]\to[\sqrt{1}]=1$	$l(7)=4=1+l(3)$
$m=8:[\sqrt{8}]\to[\sqrt{4}]=2$	$l(8)=2=1+l(4)$
$m=9:[\sqrt{9}]=3$	$l(9)=1$
$m=10:[\sqrt{10}]\to[\sqrt{1}]=1$	$l(10)=2=1+l(1)$
$m=11:[\sqrt{11}]\to[\sqrt{2}]\to[\sqrt{1}]=1$	$l(11)=3=1+l(2)$

$m=$(平方数) を境に規則が見えてきましたね．まだピンと来ない場合は続きを求めてみて下さい．$m=23$ くらいまでには見えてくると思います．この実験結果を踏まえて解答します．

ここから答案です．

$l(k^2+p)=1+l(p)\ (1\leqq p\leqq 2k)$ が成り立つ．

$\because$ $k^2+p\ (1\leqq p\leqq 2k)$ について，

$n_1=[\sqrt{k^2+p}\ ]=k$

$n_2=[\sqrt{k^2+p-k^2}\ ]=[\sqrt{p}\ ]$

よって，

$k^2+p=n_1{}^2+n_2{}^2+\cdots+n_{l(m)}{}^2$

$p=\qquad n_2{}^2+\cdots+n_{l(m)}{}^2$

したがって，$l(k^2+p)=1+l(p)$

いま，$l(m)=4$ となる最小の m は $m=7$ である．

よって，$l(a)=5$ となる最小の正整数 a は，$2k\geqq 7$ となる最小の k が $k=4$ より，

$l(a)=l(4^2+7)=1+l(7)=1+4=5$　すなわち $a=4^2+7=23$

同様にして，$2k\geqq 23$ となる最小の k が $k=12$ より，

$l(b)=l(12^2+23)=1+l(23)=1+5=6$　すなわち　$b=12^2+23=167$

$2k\geqq 167$ となる最小の k が $k=84$ より，

$l(c)=l(84^2+167)=1+l(167)=1+6=7$　すなわち　$c=84^2+167=7223$

以上より，

$(a,\ b,\ c)=(23,\ 167,\ 7223)$　…（答）