対偶法　2 問目の解答

n が自然数であるとき，2^n-1 が素数ならば，n も素数であることを証明しなさい。
【京都府立医科大】

(証明)

対偶「n が 1 または合成数ならば，2^n-1 も 1 または合成数」を示す。【対偶法】

（ア）$n=1$ のとき

$2^n-1=2^1-1=1$　[2^n-1 が 1 となったので n が 1 のときが示せた]

（イ）n が合成数のとき，

$n=ab$（a，b は 2 以上の自然数）

と表せる。このとき，

$$\begin{aligned} 2^n-1 &= 2^{ab}-1 \\ &= (2^a)^b-1 \\ &= (2^a-1)\{(2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+\cdots+2^a+1\} \end{aligned}$$

[因数分解公式 $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ を利用]

ここで，

$2^a-1\geqq 2^2-1=3\geqq 2$

$(2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+\cdots+2^a+1\geqq 2^a+1\geqq 2$

であるから，2^n-1 は合成数である。

(ア)，(イ) より対偶は真。

もとの対偶はもとの命題と真偽が一致するので，もとの命題も真である。（証明終了）

(補足)

- 「合成数」とは「1 とその数自身以外の約数をもつ自然数 」
  基本的には解答のように扱えば良い。
- 「自然数」は「1」「素数」「合成数」によって構成されている。
- 「素数」の否定は「1 または 合成数」
- $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ は因数分解公式として覚えておくこと
  一般に，$(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots ab^{n-2}+b^{n-1})$