数学的帰納法　2 問目の解答

整数 $a_n=19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めよ。

【東工大】

(解答)

$a_1=19+2=21=3\cdot7$

$a_2=19^2-2^5=361-32=329=7\cdot47$

よって，すべての a_n を割り切る素数は 7 であることが必要。

すべての自然数 n に対して，「a_n が 7 で割り切れる」$\cdots$(☆) ことを，数学的帰納法で示す。

（ア）$n=1$ のとき，先の計算により（☆）が成り立つ。

（イ）$n=k$ のとき（☆）が成り立つと仮定すると，

$$a_k\equiv19^k+(-1)^{k-1}2^{4k-3}\equiv0 \pmod 7$$

よって，　$5^k+(-1)^{k-1}2^{4k-3}\equiv0 \pmod 7 \quad \cdots ①$

$n=k+1$ のとき，

$$a_{k+1}\equiv19^{k+1}+(-1)^k2^{4(k+1)-3}\equiv0 \pmod 7$$

すなわち，　$5^{k+1}+(-1)^k2^{4k+1}\equiv0 \pmod 7$

が成り立つことを示す。

① より，$5^k\equiv-(-1)^{k-1}2^{4k-3}\equiv(-1)^k2^{4k-3} \pmod 7$ であるから，

$$\begin{aligned}5^{k+1}+(-1)^k2^{4k+1}&\equiv5\cdot\underline{5^k}+(-1)^k2^{4k+1}\\&\equiv5\cdot\underline{(-1)^k2^{4k-3}}+(-1)^k2^{4k+1}\\&\equiv5\cdot(-1)^k2^{4k-3}+2^4\cdot(-1)^k2^{4k-3}\\&\equiv-2\cdot(-1)^k2^{4k-3}+2\cdot(-1)^k2^{4k-3}\quad[5\equiv-2 \pmod 7]\\&\equiv0 \pmod 7\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (☆) が成り立つ。

(ア)，(イ) より，すべての自然数 n について (☆) が成り立つ。

よって，求める素数は 7 $\cdots$ (答)

(補足)

- $n=1,\ 2$ のときを考えれば答えが 7 であることは推測できるので，それを数学的帰納法によって示した。（定石）
- 合同式の扱いに慣れていないと，少し苦労する。ちなみに，合同式を用いずに証明することも可能。（流れは同じ）