

数学的帰納法 1 問目の解答

$a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2na_n - 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = -2n + 1$ であることを証明せよ。

(証明)

すべての自然数 n について「 $a_n = -2n + 1$ 」…(☆) が成り立つことを、
数学的帰納法で示す。

(ア) $n = 1$ のとき, $a_1 = -2 \cdot 1 + 1 = -1$ より (☆) が成り立つ。

(イ) $n = k$ のとき (☆) が成り立つと仮定すると,

$$a_k = -2k + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$n = k + 1$ のとき,

$$a_{k+1} = -2(k+1) + 1 \quad \text{すなわち} \quad a_{k+1} = -2k - 1$$

が成り立つことを示す。

与えられた漸化式と ① より,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k^2 + 2ka_k - 2 \\ &= (-2k+1)^2 + 2k(-2k+1) - 2 \\ &= -2k - 1 \end{aligned}$$

よって, $n = k + 1$ のときも (☆) が成り立つ。

(ア), (イ) より, すべての自然数 n について (☆) が成り立つ。

よって, 一般項は $a_n = -2n + 1$ である。(証明終了)