例題　有名角でない角の扱い「$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値」解答

$\alpha=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$　cos をかぶせる

$\alpha=\dfrac{\pi}{5} \iff 5\alpha=\pi$

$\iff 3\alpha+2\alpha=\pi$

$\iff 3\alpha=\pi-2\alpha$

よって，

$\cos 3\alpha=\cos(\pi-2\alpha)$

$\cos 3\alpha=-\cos 2\alpha$　　[$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$]

$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=-(2\cos^2\alpha-1)$　　[3 倍角，2 倍角の公式]

$4\cos^3\alpha+2\cos^2\alpha-3\cos\alpha-1=0$

$(\cos\alpha+1)(4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1)$

$\cos\alpha \fallingdotseq -1$ より，

$4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1$

$\cos\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\cos\alpha<1$ より　$\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\left(=\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$

$\boxed{\text{別解}}$　sin をかぶせる（こっちの方が簡単）

$3\alpha=\pi-2\alpha$ まで同じ。

$\sin 3\alpha=\sin(\pi-2\alpha)$

$\sin 3\alpha=\sin 2\alpha$　　[$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$]

$-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$　　[3 倍角，2 倍角の公式]

$\sin\alpha \fallingdotseq 0$ であるから $\sin\alpha$ で割って，

$-4\sin^2\alpha+3=2\cos\alpha$

$-4(1-\cos^2\alpha)+3=2\cos\alpha$　　[相互関係]

$4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$

よって，$\cos\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\cos\alpha<1$ より　$\cos\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\left(=\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$