

練習問題 有名角でない角の扱い「 $\sin \frac{\pi}{10}$ の値」解答

解答

$$5\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\alpha + 3\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$$

よって,

$$\sin 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)$$

$$\sin 2\alpha = \cos 3\alpha \quad \dots (\text{答})\text{ア} \quad \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \right]$$

$$2\sin \alpha \cos \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \quad \dots (\text{答})\text{イウ}$$

$\cos \alpha \neq 0$, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ であるから,

$$2\sin \alpha = 4(1 - \sin^2 \alpha) - 3$$

整理して,

$$4\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha - 1 = 0 \quad \dots (\text{答})\text{エオ}$$

$0 < \sin \alpha < 1$ であるから, これを解くと,

$$\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \left(= \sin \frac{\pi}{10} \right) \quad \dots (\text{答})\text{カ}$$

参考) $\sin \frac{\pi}{10}$ の値は, 半角の公式から求めることも可能。(例題の結果を利用)

$$\sin^2 \frac{\pi}{10} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} \quad \left[\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right]$$

$\sin \frac{\pi}{10} > 0$ より,

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad [2 \text{重根号の処理}]$$

でも, これだと穴埋めはできませんね。