1

r，s を正の実数とする。放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-s)^2=r^2$ の共有点の個数 N を考える。

(1)　N が奇数であるような $(r,\ s)$ の範囲を rs 平面上に図示せよ。
(2)　$N=2$ であるような $(r,\ s)$ の範囲を rs 平面上に図示せよ。
(3)　$N=0$ であるような $(r,\ s)$ の範囲を rs 平面上に図示せよ。

答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解答　$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-s)^2=r^2 \end{cases}$ より，$x^2=y$ として x^2 を消去して整理すると，

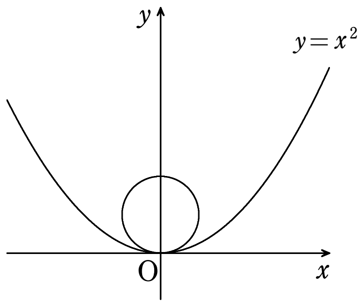
$$y^2-(2s-1)y-(r^2-s^2)=0 \cdots ①$$

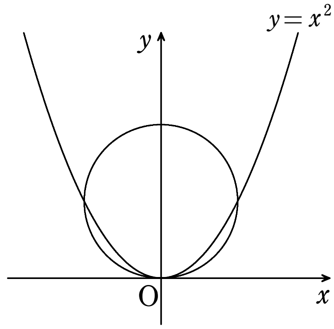
また，

$$f(y)=y^2-(2s-1)y-(r^2-s^2)$$
$$=\left(y-\frac{1-2s}{2}\right)^2-r^2+s-\frac{1}{4}$$

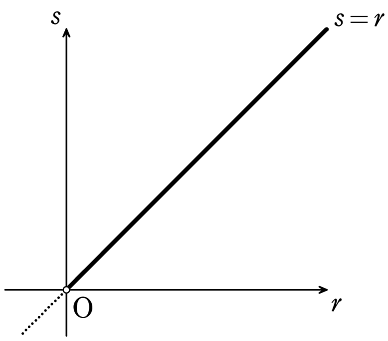
とする。

(1)





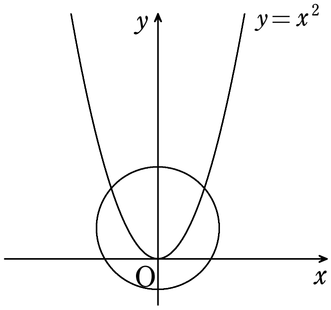
N が奇数となるのは，放物線と円が，原点で接するときである。
よって，$s=r$



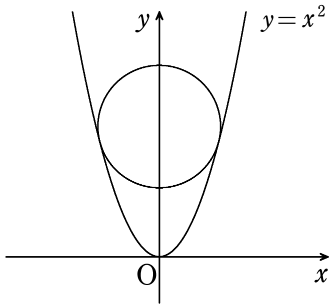
…(答)

図の実線部分

(2) (ア)



(イ)



$N=2$ となるのは，

（ア） $s<r$

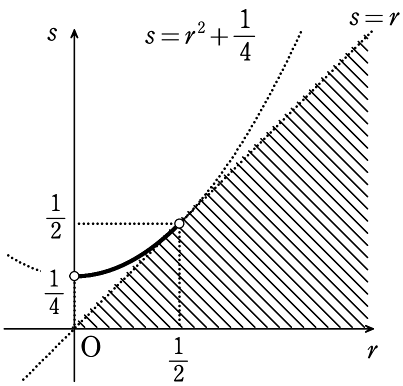
（イ） 放物線と円が原点と異なる 2 点で接する

の 2 パターンである。

(イ) は，y の 2 次方程式 ① が $y>0$ の範囲で重解をもつときであるから，

$$\begin{cases} \dfrac{1-2s}{2}>0 \\ -r^2+s-\dfrac{1}{4}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} s<\dfrac{1}{2} \\ s=r^2+\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

よって，



… (答)

図の実線部分と斜線部分。

ただし，境界線を含まない。

(3) $N=0$ となるのは，y の 2 次方程式 ① が

（ア） 実数解をもたない

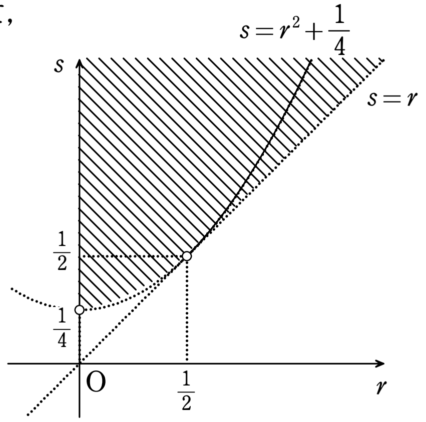
（イ） $y<0$ の範囲で 2 つの解をもつ (重解含む)

の 2 パターンである。

（ア） $D<0$ より $s>r^2+\dfrac{1}{4}$

（イ） $$\begin{cases} \dfrac{1-2s}{2}<0 \\ -r^2+s-\dfrac{1}{4}\leqq 0 \\ f(0)>0\ (\iff -r^2+s^2>0) \end{cases} \iff \begin{cases} s>\dfrac{1}{2} \\ s\leqq r^2+\dfrac{1}{4} \\ s>r \end{cases}$$

よって，



…(答)

図の斜線部分（実線部分含む）。

ただし，境界線を含まない。

<(3) 別解>

$N=4$ となるのは，y の 2 次方程式 ① が $y>0$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつときより，

$$\begin{cases} \dfrac{1-2s}{2}>0 \\ -r^2+s-\dfrac{1}{4}<0 \\ f(0)>0\ (\Leftrightarrow -r^2+s^2>0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s<\dfrac{1}{2} \\ s<r^2+\dfrac{1}{4} \\ s>r \end{cases} \quad \cdots ②$$

第 1 象限から，(1)，(2)，② を除外した部分を図示すればよい。

2

四面体 OABC の各辺上に頂点以外の点を 1 つずつとり，その 6 点を考える。

(1)　6 点のうち 4 点を頂点とする平行四辺形が作れるとき，平行四辺形の辺は四面体のある辺と平行であることを示せ。

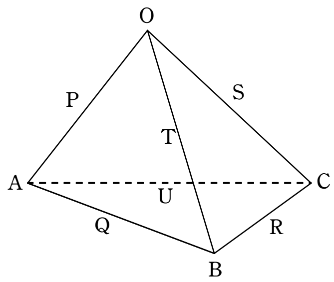
(2)　6 点のうち 4 点を頂点とする平行四辺形が 2 つ作れるとき，2 つの平行四辺形は対角線の 1 本を共有することを示せ。

(3)　(2) において，共有する対角線の中点を M とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

答　(1)　答　　(2)　答　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

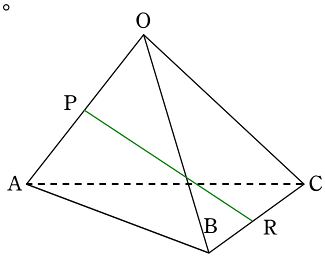
解答

右の図のように，
辺 OA，AB，BC，CA，OB，AC 上の点を
それぞれ P，Q，R，S，T，U とする。

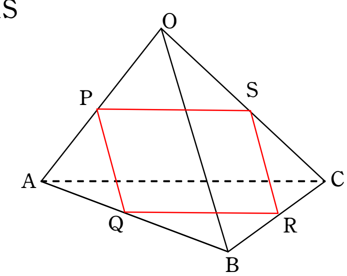


(1)　四角形の 1 つの頂点を P としても一般性を失わない。

　四角形が PR を 1 辺とするとき (ねじれの位置にある 2 辺上の点を結ぶとき)，平行四辺形を作ることができない。



よって，
四角形の 1 辺を PQ としても一般性を失わない。
このとき，平行四辺形となり得るのは，四角形 PQRS である。s，t，s'，t' を 1 より小さい正の数とする。



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &=\left\{(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots ①\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}\\ &=\left\{(1-s')\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}-t'\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &=(1-s')\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(s'-t')\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots ②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ であるから，①，② より $\begin{cases}1-s-t=0\\ s=s'-t'\\ 0=s'-t'\end{cases} \iff \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}=s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって，PQ∥SR∥OB

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ から，PS∥QR∥AC を得る。

以上より，題意が示された。（証明終了）

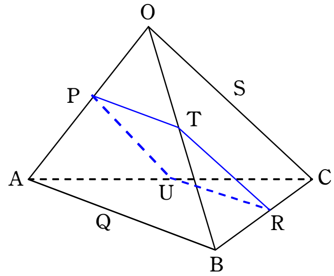
(2)　1 つの平行四辺形を ▱ PQRS とする。

2 つ目の四角形を作るとき，必ず 2 点を共有する。

そのうちの 1 点を P，もう 1 つの点を Q または R としても一般性を失わない。

(ア)　P と Q を共有するとき

2 つ目の平行四辺形は ▱ PQRS と一致する。



(イ)　P と R を共有するとき

PR を 1 辺とする平行四辺形を作ることはできないので，2 つ目の平行四辺形は，▱ PTRU となる。

よって，対角線 PR を共有する。

(3)　平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるので

M ＝ (PR の中点) ＝ (TU の中点) ＝ (QS の中点)

である。

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を 3 通りで表して係数比較する。

s_1，t_1，s_2，t_2，s_3，t_3 を 1 より小さい正の数とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}})$$
$$= \frac{1}{2}\{s_1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t_1)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t_1\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OT}} + \overrightarrow{\mathrm{OU}})$$
$$= \frac{1}{2}\{s_2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t_2)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t_2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(1-t_2)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s_2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t_2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}})$$
$$= \frac{1}{2}\{(1-s_3)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s_3\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t_3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}$$

係数を比較して，

$$\begin{cases} s_1 = 1-t_2 = 1-s_3 \\ 1-t_1 = s_2 = s_3 \\ t_1 = t_2 = t_3 \end{cases} \iff s_1 = t_1 = s_2 = t_2 = s_3 = t_3 = \frac{1}{2}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \quad \cdots (答)$$

3

Ⅰ．赤玉 4 個，白玉 4 個が入っている袋から，玉を 1 個ずつ 6 回続けて取り出す。ただし，取り出した玉はもとに戻さないとする。

(1) 袋の赤玉がすべてなくなっている確率を求めよ。
(2) ちょうど 6 回目に袋の赤玉がすべてなくなる確率を求めよ。

Ⅱ．袋に赤玉 a 個，白玉 b 個が入っている。袋から玉を 1 個取り出し，その玉をもとに戻した上で，その玉と同じ色の玉を新たに 1 個袋に入れる。この試行を n 回続けて行うとき，袋には $a+b+n$ 個の玉が入っている。

(1) 1 回目，2 回目，3 回目に赤玉が出る確率をそれぞれ求めよ。
(2) n 回目に赤玉が出る確率を求めよ。

答 Ⅰ．(1) $\dfrac{3}{14}$ (2) $\dfrac{1}{7}$

Ⅱ．(1) 1 回目 $\dfrac{a}{a+b}$，2 回目 $\dfrac{a}{a+b}$，3 回目 $\dfrac{a}{a+b}$ (2) $\dfrac{a}{a+b}$

解答

Ⅰ．

(1) 6 回の試行で，赤玉 4 個，白玉 2 個を取り出す確率より，

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_4\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_6}=\frac{6}{28}=\mathbf{\frac{3}{14}} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) 5 回の試行で赤玉 3 個，白玉 2 を取り出し，さらに 6 回目で赤玉を取り出す確率より，

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_4\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_5}\times\frac{1}{3}=\frac{24}{56}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{7}} \quad \cdots(\text{答})$$

Ⅱ．n 回目に 赤玉が出る確率を p_n とする。

(1) $p_1=\boldsymbol{\dfrac{a}{a+b}}$ $\cdots$(答)

$$\begin{aligned}p_2&=(\text{赤赤 の確率})+(\text{白赤 の確率})\\&=\frac{a}{a+b}\times\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b+1}\\&=\frac{a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)}\\&=\boldsymbol{\frac{a}{a+b}} \quad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_3&=(\text{赤赤赤 の確率})+(\text{赤白赤 の確率})+(\text{白赤赤 の確率})+(\text{白白赤 の確率})\\&=\frac{a(a+1)(a+2)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}+\frac{ab(a+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}\\&\qquad+\frac{ba(a+1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}+\frac{b(b+1)a}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}\end{aligned}$$

$$= \frac{a\{(a+1)(a+2)+2b(a+1)+b(b+1)\}}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}$$

$$= \frac{a\{a^2+(2b+3)a+(b+1)(b+2)\}}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}$$

$$= \frac{a(a+b+1)(a+b+2)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}$$

$$= \frac{a}{a+b} \quad \cdots \text{(答)}$$

(2)　$p_n = \dfrac{a}{a+b}$ ⋯ (☆)

すべての自然数 n で (☆) が成り立つことを数学的帰納法により示す。

(ア)　$n=1$ のとき　(1) より (☆) が成り立つ。

(イ)　$n=k$ のとき (☆) が成り立つと仮定すると

$$p_k = \frac{a}{a+b} \quad \cdots ①$$

$n=k+1$ のとき $p_{k+1} = \dfrac{a}{a+b}$ が成り立つことを示す。

$$p_{k+1} = \left(\begin{array}{c} \underline{\text{1 回目に赤玉が出て，}k+1\text{ 回目に赤が出る確率}} \\ + \\ \underline{\text{1 回目に白玉が出て，}k+1\text{ 回目に赤が出る確率}} \end{array}\right.$$

(ｉ) 1 回目に赤玉が出る確率は $\dfrac{a}{a+b}$

このとき，袋の中は赤玉 $a+1$ 個，白玉 b 個である。

この状態から始めて k 回目に赤玉が出る確率は ① より，

$$\frac{a+1}{(a+1)+b} = \frac{a+1}{a+b+1}$$

(ii) 1 回目に白玉が出る確率は $\dfrac{b}{a+b}$

このとき，袋の中は赤玉 a 個，白玉 $b+1$ 個である。

この状態から始めて k 回目に赤玉が出る確率は ① より，

$$\frac{a}{a+(b+1)} = \frac{a}{a+b+1}$$

よって，

$$p_{k+1} = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}$$

$$= \frac{a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)}$$

$$= \frac{a}{a+b}$$

よって，$n=k+1$ のときも (☆) が成り立つ。

(ア)，(イ) より，すべての自然数 n で (☆) が成り立つ。

したがって，求める確率は　$\dfrac{a}{a+b}$　⋯ (答)

4

実数全体を定義域とする微分可能な関数 $f(x)$ は，常に $f(x)>0$ であり，等式

$$f(x)=1+\int_0^x e^t(1+t)f(t)dt$$

を満たしている。

(1)　$f(0)$ を求めよ。

(2)　$\log f(x)$ の導関数 $(\log f(x))'$ を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ を求めよ。

(4)　方程式 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解け。

答　(1)　1　　(2)　$e^x(1+x)$　　(3)　$f(x)=e^{xe^x}$　　(4)　$x=-\log 2,\ -2\log 2$

解答

(1)　$f(0)=1+0=\mathbf{1}$　…(答)

(2)　$(\log f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{e^x(1+x)f(x)}{f(x)}=\boldsymbol{e^x(1+x)}$　…(答)

(3)　(2) より，

$$\begin{aligned}\log f(x) &= \int e^x(1+x)dx \\ &= e^x(1+x)-e^x+C \\ &= xe^x+C\end{aligned}$$

よって　$f(x)=e^{xe^x+C}$

$f(0)=1$ より　$e^C=1$　$\therefore C=0$

以上より　$\boldsymbol{f(x)=e^{xe^x}}$　…(答)

(4)　(2) より，$f'(x)=e^x(1+x)f(x)$

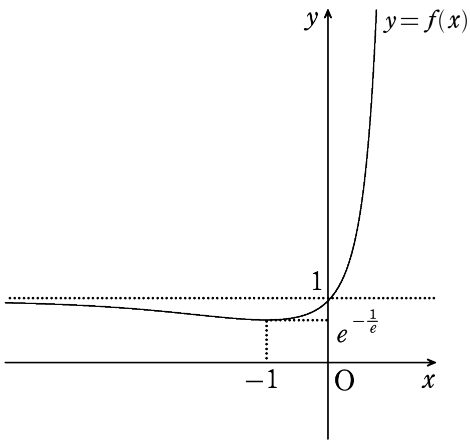
よって，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは

右の図のようになるので，



$e^{-\frac{1}{e}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$ に注意すると，

方程式 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の実数解は 2 個存在する。

ここで，

$$f(x)=e^{xe^x}=(e^x)^{e^x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

であるから，

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow x=\log\frac{1}{2},\ \log\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x=-\log 2,\ -2\log 2} \quad \cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

【講評】

$\boxed{1}$ ［図形と方程式］（標準）

円と放物線の共有点の個数に関する問題。文字が定数が 2 つなのでややメンドウであるが，図を描きながら進めていけば難しくはない。ここは落としたくない。

$\boxed{2}$ ［ベクトル］（やや難）

証明問題については，図を描いてみれば確かに正しそうであるが，それを説明するのがやや難しい。図形的による説明と，ベクトルによる計算をうまく使い分けたい。

$\boxed{3}$ ［確率］（易，最後だけ難）

「ポリアの壺」の確率の問題。最後、結果の推測は簡単であるが，証明はやや難しい。

$\boxed{4}$ ［微積（数Ⅲ）］（易，最後だけ難）

⑴⑵⑶ は基本問題なので落とせない。⑷ は方針が立てにくいが，グラフを描いてみると解が 2 つとなることは判明する。そこから攻めることができたかどうか。

＜全体＞

2022年度と比べて「やや易化」した。解きにくい問題も混じってはいるが，解きやすい問題も比較的多かった。本番の緊張の中で，解ける問題（解くべき問題）をどれだけ取りきれたかが合否を分ける。

$\boxed{1}$，$\boxed{3}$ Ⅰ⑴⑵,Ⅱ⑴，$\boxed{4}$⑴⑵⑶ は確実に取りきりたい。次に $\boxed{2}$⑶も得点したい。あとは他の問題において，最後まで解けなくても部分点をどれだけ稼げたかが勝負か。

目標は 65～70 % くらい。