2023 年度　神戸大学（理）前期　数学　問題

1． 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & (x \leqq 1)\\ 2x-1 & (x>1)\end{cases}$$

で定める．a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a,\ \ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．（配点 30 点）

(1) すべての実数 x について $f(x) \geqq x$ が成り立つことを示せ.

(2) $a \leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n \leqq 1$ が成り立つことを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ.

2． a，b を実数とする．整式 $f(x)$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で定める．
以下の問に答えよ．ただし，2 次方程式の重解は 2 つと考える．
（配点 30 点）

(1) 2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に 0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3) 2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

3． n を 2 以上の整数とする．袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(2) この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(3) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n+1$ 以上である確率を求めよ．

4. 四面体 OABC があり，辺 OA，OB，OC の長さはそれぞれ $\sqrt{13}$，5，5 である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-11$ とする．頂点 O から △ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点 H とする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 実数 s，t を $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたすように定めるとき，s と t の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

5．媒介変数表示

$$x=\sin t,\quad y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) $\dfrac{dx}{dt}=0$ または $\dfrac{dy}{dt}=0$ となる t の値を求めよ．

(2) C の概形を xy 平面上に描け．

(3) C の $y \leqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．