2023 年度　神戸大学（理系，前期）　数学　解答

1． 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & (x\leqq 1)\\ 2x-1 & (x>1)\end{cases}$$

で定める．a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a,\ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．（配点 30 点）

(1) すべての実数 x について $f(x)\geqq x$ が成り立つことを示せ．

(2) $a\leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n\leqq 1$ が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ．

答　(1) 略　(2) 略　(3) $a_n=\begin{cases}(a-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+1 & (a\leqq 1\text{のとき})\\ (a-1)2^{n-1}+1 & (a>1\text{ のとき})\end{cases}$

解答

(1) $f(x)-x=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & (x\leqq 1)\\ x-1 & (x>1)\end{cases}$

$g(x)=f(x)-x$ とすると，$g(x)$ は $g(x)\geqq g(1)=0$

よって，$f(x)-x\geqq 0$

したがって，$f(x)\geqq x$　（証明終了）

(2) $a_n\leqq 1$　…（☆）がすべての整数 n で成り立つことを数学的帰納法で示す．

（ア）$n=1$ のとき $a_1=a\leqq 1$ より（☆）が成り立つ．

（イ）$n=k$ のとき（☆）が成り立つと仮定すると，

$$a_k\leqq 1$$

$n=k+1$ のとき $a_{k+1}\leqq 1$ が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=f(a_k)\\&=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}\quad (\because\ a_k\leqq 1\text{ より})\\&\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\quad (\because\ a_k\leqq 1\text{ より})\\&=1\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも（☆）が成り立つ．

(ア)，(イ) より，すべての正の整数 n で（☆）が成り立つ．（証明終了）

(3) $a \leqq 1$ のとき (2) より，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$$

$$a_n-1=(a_1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n=(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$$

$a>1$ のとき (2) と同様にして $a_n>1$ …（☆′）を示す．

（ア）$n=1$ のとき $a_1=a>1$ より (☆′) が成り立つ．

（イ）$n=k$ のとき (☆′) が成り立つと仮定すると，$a_k>1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= f(a_k) \\ &= 2a_k-1 \quad (\because\ a_k>1 \text{ より}) \\ &> 2-1 \quad (\because\ a_k>1 \text{ より}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって，すべての正の整数 n について，$a_n>1$

したがって，$a>1$ のとき，

$$a_{n+1}=2a_n-1$$

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$$

$$a_n-1=(a_1-1)2^{n-1}$$

$$a_n=(a-1)2^{n-1}+1$$

以上より，

$$\boldsymbol{a_n=\begin{cases}(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1 & (a\leqq 1 \text{のとき}) \\ (a-1)2^{n-1}+1 & (a>1 \text{ のとき})\end{cases}} \quad \cdots (\text{答})$$

2023 年度　神戸大学（理系，前期）　数学　解答

2． a，b を実数とする．整式 $f(x)$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で定める．以下の問に答えよ．ただし，2 次方程式の重解は 2 つと考える．
（配点 30 点）

（1）2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ．

（2）2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に 0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

（3）2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

答（1）$a>0$ かつ $0<b<\dfrac{a^2}{4}$　（2）略　（3）略

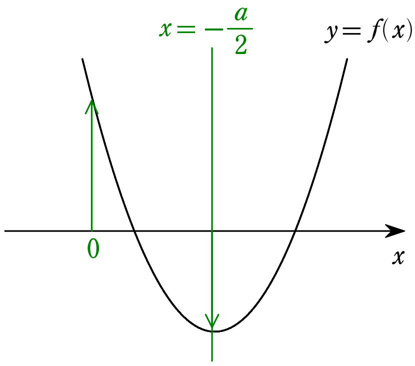
解答

（1）$f(x)=x^2+ax+b$

$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$$

$f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\text{軸})\ -\dfrac{a}{2}>0 \\ (\text{頂点})\ -\dfrac{a^2}{4}+b<0 \\ (\text{端点})\ f(0)=b>0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b<\dfrac{a^2}{4} \\ b>0 \end{cases}$$

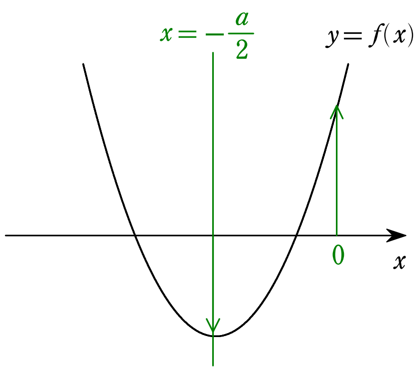
よって，$a>0$ かつ $0<b<\dfrac{a^2}{4}$　…(答)

（2）「実数解のとき」と「虚数解のとき」で場合分けして考える．

（ア）実数解のとき $(D\geqq 0$ のとき$)$

$f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に 0 より小さい

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\text{軸})\ -\dfrac{a}{2}<0 \\ (\text{頂点})\ -\dfrac{a^2}{4}+b\leqq 0 \\ (\text{端点})\ f(0)=b>0 \end{cases}$$



2023 年度　神戸大学（理系，前期）　数学　解答

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b \leqq \dfrac{a^2}{4} \quad \cdots ① \\ b>0 \end{cases}$$

（イ）虚数解のとき $(D<0$ のとき$)$

$f(x)=0$ を解くと，$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{D}}{2}$ (ただし，D は $f(x)=0$ の判別式) .

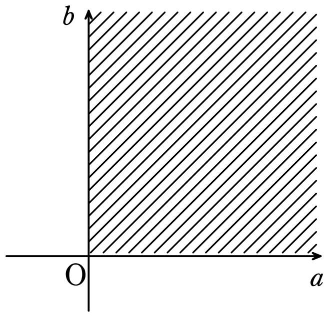
実部は $-\dfrac{a}{2}$ であるから，

$f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に 0 より小さい

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D<0 \\ -\dfrac{a}{2}<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b>\dfrac{a^2}{4} \quad \cdots ② \\ a>0 \end{cases}$$

①，② を合わせると，$a>0$ かつ $b>0$ となる.



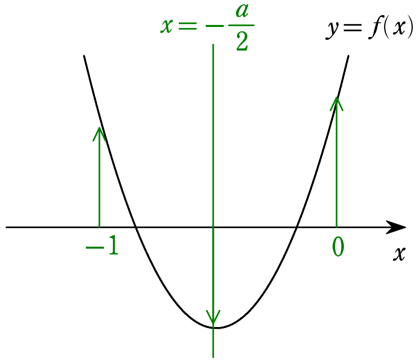
図の斜線部分．ただし，境界線を含まない.

(3) (2) と同様に場合分けする.

（ア）実数解のとき $(D\geqq 0$ のとき$)$

$f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さい.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\text{軸})\ -1<-\dfrac{a}{2}<0 \\ (\text{頂点})\ -\dfrac{a^2}{4}+b\leqq 0 \\ (\text{端点})\ f(0)=b>0 \text{ かつ } f(-1)=1-a+b>0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<2 \\ b\leqq \dfrac{a^2}{4} \quad \cdots ③ \\ b>0 \text{ かつ } b>a-1 \end{cases}$$

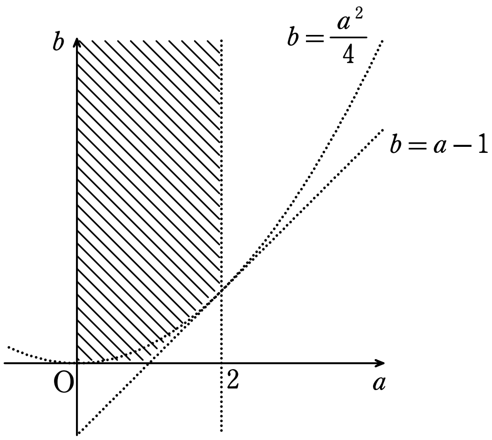
（イ）虚数解のとき ($D<0$ のとき)

$f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さい.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D<0 \\ -1<-\dfrac{a}{2}<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b>\dfrac{a^2}{4} \\ 0<a<2 \end{cases} \quad \cdots ④$$

③，④ を合わせて，



図の斜線部分.

ただし，境界線を含まない.

2023 年度　神戸大学（理系，前期）　数学　解答

3．n を 2 以上の整数とする．袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている．以下の問に答えよ．
（配点 30 点）

(1) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．
(2) この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．
(3) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n+1$ 以上である確率を求めよ．

答 (1) $\dfrac{n-1}{2n-1}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{n}{2n-1}$

解答

(1) 全事象は ${}_{2n}C_2=\dfrac{2n(2n-1)}{2\cdot 1}=n(2n-1)$（通り）

2 数の和が偶数となるのは，(偶数，偶数) または (奇数，奇数) のときである．
この場合の数は，

$${}_nC_2+{}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\times 2=n(n-1)\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は，

$$\frac{n(n-1)}{n(2n-1)}=\boldsymbol{\frac{n-1}{2n-1}}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) 全事象は ${}_{2n}C_3=\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{2n(2n-1)(n-1)}{3}$（通り）

3 数の和が偶数となるのは，(偶数，偶数，偶数) または (偶数，奇数，奇数) のときである．
ここで，(偶数，偶数，偶数) となるのは $n\geqq 3$ のときに限る．

(ア) $n=2$ のとき

全事象は $\dfrac{4\cdot 3\cdot 1}{3}=4$（通り）

3 数の和が偶数となるのは ${}_2C_1\cdot{}_2C_2=2$（通り）

よって，3 数の和が偶数となる確率は $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

(イ) $n\geqq 3$ のとき

3 数の和が偶数となるのは，

$${}_nC_3+{}_nC_1\cdot{}_nC_2=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}+n\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)+3n^2(n-1)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)\{(n-2)+3n\}}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$$

よって，3 数の和が偶数となる確率は，

$$\frac{\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}}{\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}} = \frac{1}{2}$$

以上より，求める確率は $\frac{1}{2}$ …(答)

(3) 全事象は ${}_{2n}\mathrm{C}_2 = n(2n-1)$ （通り）

2 数を x，y $(x<y)$ とすると，2 数の和が $2n+1$ 以上より，

$$x+y \geqq 2n+1 \ (x,\ y：自然数)$$

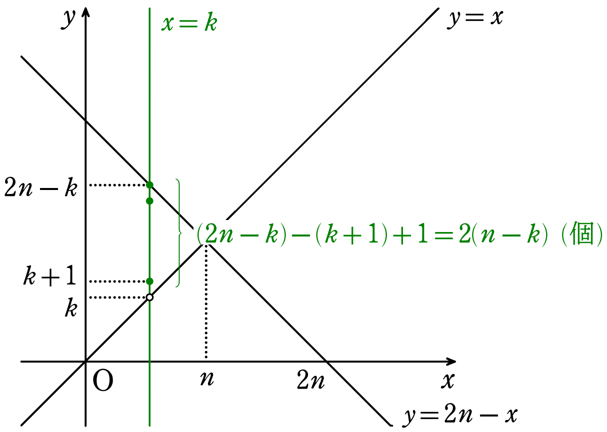
余事象を考えると，

$$x+y \leqq 2n \ (x,\ y：自然数)$$

よって，連立不等式

$$\begin{cases} y > x \\ x+y \leqq 2n \end{cases} \quad \cdots ①$$

で表される領域内の格子点の個数を考える．



$x=k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 上にある格子点の個数は　$2(n-k)$ （個）

よって，領域 ① 内の格子点の個数は，

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k) = 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = n(n-1) \ （個）$$

したがって，余事象の確率は $\frac{n(n-1)}{n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}$

以上より，求める確率は $1-\frac{n-1}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$ …(答)

4． 四面体 OABC があり，辺 OA，OB，OC の長さはそれぞれ $\sqrt{13}$，5，5 である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-11$ とする．頂点 O から △ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点 H とする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 実数 s，t を $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたすように定めるとき，s と t の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

答 (1) 6　(2) $s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$　(3) $6\sqrt{5}$

「ベクトル」の考え方をメインにして解く方法と，「図形的」な考え方をメインにして解く方法があります．どちらも重要ですが，後者の方が簡単で重要度も高いです．ただ，誘導が前者を想定していると思われるので，後者は別解としておきます．

解答【解法 1】ベクトルによるごり押し（本来は非推奨）

(1)
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\ &= 5^2-2\cdot1+(\sqrt{13})^2\\ &= 36\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|>0$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=6$　$\therefore$ **AB ＝ 6**　… (答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，s と t の値を求める．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 1-13 = -12$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=36$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\ &= -11-1-1+13\\ &= 0\end{aligned}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -12+36s=0 \quad \therefore\ s=\frac{1}{3}$$

同様にして，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より，$t=\dfrac{1}{3}$．

以上より，$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$　…(答)

(3) 求める体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle ABC\times|\overrightarrow{OH}|$　である．

(1) より，AB = 6，AC = 6

また，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より，$\angle BAC=90^\circ$

よって，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot6=18$

(2) より，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$$|\overrightarrow{OH}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=\frac{1}{9}\{(13+25+25)+2(1+1-11)\}=5$$

$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{5}$

以上より，

$V=\dfrac{1}{3}\times18\times\sqrt{5}=\mathbf{6\sqrt{5}}$　…(答)

別解【解法２】図形的に求める（誘導がなければ推奨）

(1) 解答 と同じ．

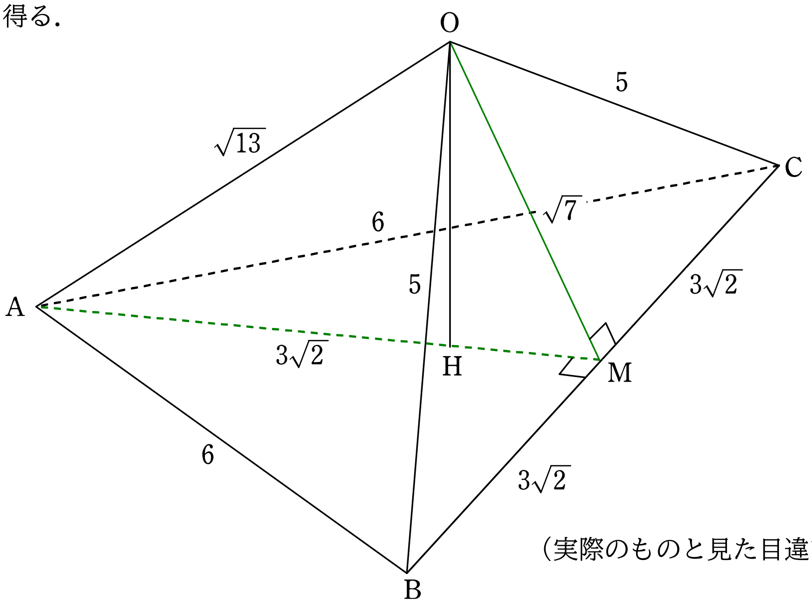
ここで，(1) と同様にして AC，BC の長さを求めると，AC = 6，BC = $6\sqrt{2}$．

よって，BC の中点を M とすると，四面体 OABC は △OAM に関して対称である．

三平方の定理より，

OM = $\sqrt{7}$，AM = $3\sqrt{2}$

を得る．



（実際のものと見た目違います。）

余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{OAM}=\frac{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{13})^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{26}}$$

三角関数の相互関係より，

$$\sin\angle\mathrm{OAM}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{13}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

3 点 A，H，M は一直線上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ であるから，AH と AM の長さの比が分かれば良い．

いま，$\mathrm{AM}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{AH}=\sqrt{13}\cos\angle\mathrm{OAM}=2\sqrt{2}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって，$s=\frac{1}{3}$，$t=\frac{1}{3}$　…(答)

(3) 対称性より，求める体積 V は，$V=$(四面体 OABM)$\times 2$

$$(\text{四面体 OABM})=\frac{1}{3}\times\underline{\triangle\mathrm{OAM}}\times\underline{\mathrm{MB}}$$ ［△OAM を底面と見れば，高さは MB］

$$=\frac{1}{3}\times\underline{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sin\angle\mathrm{OAM}}\times\underline{3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{13}}\times 3\sqrt{2}$$

$$=3\sqrt{5}$$

よって，

$V=3\sqrt{5}\times 2=\mathbf{6\sqrt{5}}$　…(答)

5． 媒介変数表示

$$x=\sin t,\quad y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\quad (0\leqq t\leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．（配点 30 点）

(1) $\dfrac{dx}{dt}=0$ または $\dfrac{dy}{dt}=0$ となる t の値を求めよ．

(2) C の概形を xy 平面上に描け．

(3) C の $y\leqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

答 (1) $t=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$　(2) 略　(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

解答

(1) $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ より，$\dfrac{dx}{dt}=0$ となるのは　$t=\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos t\\&=\cos t\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)-\sin t\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\quad\text{[加法定理]}\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{6}\leqq 2t-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{11}{6}\pi$ であるから，$\dfrac{dy}{dt}=0$ となるのは，

$2t-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$　$\therefore\ t=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{6}\pi$

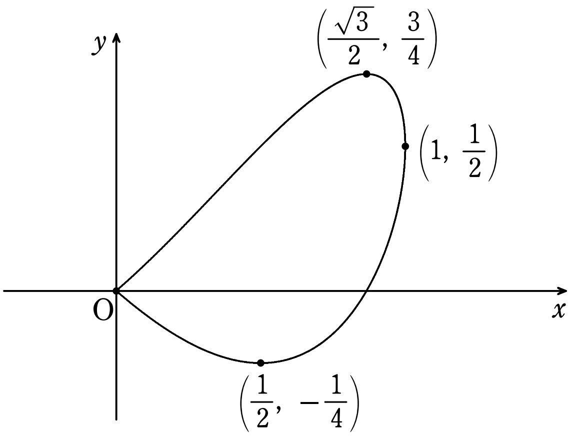
以上より，$\boldsymbol{t=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi}$　…(答)

(2) (1) より，

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\nearrow$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$	$\searrow$	$\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$	$\swarrow$	$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$	$\nwarrow$	$(0,\ 0)$

また，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos t}$ より，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\displaystyle\lim_{t\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

以上より，曲線 C の概形は以下のようになる．



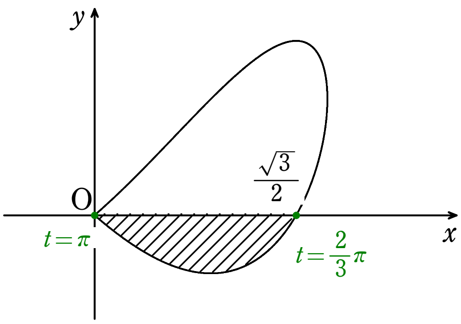
(3)　$y=0$ のとき，

$\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t=0$

$t=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

$t=\frac{2}{3}\pi$ のとき $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，求める面積 S は，



$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(-y)dx$$

$$=-\int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\underline{\sin t\cos t}\,dt$$　[積分区間に注意]

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos\left(t-\frac{p}{6}\right)\underline{\frac{\sin 2t}{2}}\,dt$$　[2 倍角の公式(次数下げ)]

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\underline{\sin 2t\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\underline{\frac{1}{2}\left\{\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}}$$　[(和 → 積)公式(次数下げ)]

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\quad\cdots(答)$$

2023年度　神戸大学（理系，前期）　数学　解答

【講評】

1．[数列]（易）

主に数学的帰納法を用いる問題．特にややこしいところもないので，完答必須．

2．[2次関数]（標準）

2次方程式の「解の配置」に関する問題．基本通り進めれば解ける．(2)(3)は実部に関する話になる．解が実数か虚数かで実部が変わるので，場合分けが必要になる．慎重に進めてミスせず解きたい．

3．[確率]（標準）

和の条件が与えれた確率の問題．(1)(2)は簡単．ただし，(2)で場合分けが必要であることを見落とした受験生は少なくないと思われる．(3)が解けるかどうかで差がつきそう．

4．[ベクトル]（標準）

四面体とベクトルの問題．最終的に四面体の体積を求める問題だが，誘導が丁寧なので方針に迷うことはないだろう．始点をOにそろえて計算すると作業量が増える．落としたくない問題ではあるが，計算力で所要時間に大きく差がつくだろう．

別解で解いた人は，大きく時間の節約ができる．

5．[媒介変数，微積分]（標準）

媒介変数表示された曲線と面積に関する問題．典型問題なので迷わず進めたい．三角関数の処理が少し厄介で，正しく処理しないと苦労する．

＜全体＞

2022年度に比べて「やや易化」した．方針に迷いにくい一方で，計算がやや煩雑な部分があるため，時間に余裕はない．例年より，処理速度による影響が出やすい問題だった．

すべての問題を解ききり，80%くらいの得点を目指したい．