背理法　2問目の解答

> 2以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数となるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。
>
> 【京都大】

(証明)

(ⅰ) $n=2$ のとき　$n^2+2=6$ は素数ではない。

(ⅱ) $n=3$ のとき　$n=3$，$n^2+2=11$ はともに素数である。

(ⅲ) $n \geqq 4$ のとき

n と n^2+2 がともに素数となるような自然数 n が存在すると仮定する。【背理法】

n は素数であるから，

$n \equiv 1,\ 2 \pmod 3$　[4以上の素数は3の倍数とはならない]

このとき，$n^2 \equiv 1,\ 4 \equiv 1 \pmod 3$

よって，

$n^2+2 \equiv 1+2 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$

となり，n^2+2 は3で割り切れる。

ここで，$n^2+2>3$ であるから n^2+2 は素数ではない。

これは，n^2+2 が素数であることに矛盾する。

よって，$n \geqq 4$ のとき，n と n^2+2 がともに素数となるような自然数 n は存在しない。

以上より，2以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数となるのは $n=3$ の場合に限る。（証明終了）

(補足)

「$n=3$ に限る」を「$n=3$ 以外に存在しない」と言い換え，背理法が定石とみなした。