

背理法 1 問目の解答

$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(証明)

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。【背理法】

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{ は互いに素な整数, } m \neq 0)$$

と表せる。

このとき,

$$\begin{aligned}\sqrt{2} m &= n \\ 2m^2 &= n^2 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

よって、 n^2 は 2 の倍数、すなわち n は 2 の倍数である。[対偶のところで証明済み]
したがって、 $n = 2k$ (k : 整数) と表せるので、 $\textcircled{1}$ に代入して

$$\begin{aligned}2m^2 &= (2k)^2 \\ m^2 &= 2k^2\end{aligned}$$

よって、 m^2 は 2 の倍数、すなわち m は 2 の倍数である。

これは、 m と n が互いに素であることに矛盾する。

以上より、 $\sqrt{2}$ は無理数である。(証明終了)